

# Estudio del comportamiento crítico en anillos superconductores tipo II en presencia de campos magnéticos

## Study of critical behavior in superconducting rings type II in the presence of magnetic fields

L. A. Santacruz, J. M. Calero

*Departamento de Física, Universidad del Valle, AA 25360, Cali (Colombia).*

Recibido 22 de sep 2008; Aceptado 2 de sep. 2009; Publicado en línea 30 de oct. 2009

### Resumen

En el marco de la teoría de Ginzburg-Landau, en la aproximación lineal, se estudia el comportamiento crítico de anillos superconductores mesoscópicos tipo II, de espesor despreciable, en presencia de un campo magnético perpendicular al plano del anillo. Especial atención se presta al análisis de la influencia del parámetro de Ginzburg-Landau (razón entre la longitud de penetración y la longitud de coherencia) sobre el diagrama de fase en la región crítica de estos sistemas, observándose que para una geometría determinada del anillo se presenta un cambio por un factor de escala del campo crítico, al variar dicho parámetro. También se analiza la manera como se modifican las regiones del diagrama de fase en las que se presenta efecto Meissner paramagnético, con respecto a la variación del cociente entre los radios interior y exterior del anillo, para un valor fijo del parámetro de Ginzburg-Landau.

**Palabras claves:** Superconductores mesoscópicos, Teoría de Ginzburg-Landau, Efecto Meissner Paramagnético.

### Abstract

In the framework of the Ginzburg-Landau theory, in the linear approach, we study the critical behavior of a type II mesoscopic superconducting ring with negligible thickness, in the presence of an applied magnetic field perpendicular to the plane of the ring. Special attention is paid to the influence of the Ginzburg-Landau parameter (ratio between the penetration and coherence lengths) on the phase diagram in the critical region of these systems. It is observed that for a determined geometry of the ring, a change by a scaling factor of the critical field appears, when varying this parameter. Also is analyzed as are modified the regions of the phase diagram in which paramagnetic Meissner effect appears, with respect to the variation of the ratio between the inner and outer radii of the ring, for a fixed value of the Ginzburg-Landau parameter.

**Keywords:** Mesoscopic Superconductors, Ginzburg-Landau Theory, Paramagnetic Meissner Effect.

© 2009 Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

### 1. Introducción

Con el surgimiento de nuevas técnicas de micro y nano fabricación se ha despertado el interés por el estudio de los efectos del tamaño y la geometría sobre diferentes propiedades físicas en muestras metálicas, semiconductoras y superconductoras. En particular, muchos trabajos tanto teóricos como experimentales se han dedicado a estudiar el comportamiento crítico en sistemas superconductores mesoscópicos.

Un superconductor mesoscópico es aquel cuyas dimensiones son comparables con la longitud de coherencia  $\xi(T)$  o la longitud de penetración magnética  $\lambda(T)$  del material, que surgen de la teoría fenomenológica de Ginzburg-Landau (GL) [1] como escalas de longitud características de la variación espacial del módulo del parámetro de orden complejo  $\Psi(\mathbf{r})$  y de la inducción magnética dentro de la muestra, respectivamente. El primer trabajo realizado sobre estos sistemas se debe a Little y Parks a principios de los años 60s [2], quienes midieron el corrimiento de la temperatura crítica  $T_c(H)$  de un microcilindro hueco, de espesor despreciable

en comparación con el radio, en presencia de un campo magnético axial  $H$ , obteniendo una curva de  $T_c(H)$  que mostró un comportamiento periódico, con periodo correspondiente a la penetración de un cuanto de flujo superconductor  $\phi_0 = hc/2e$ .

Se han publicado recientemente muchos artículos en los que se estudian las propiedades superconductoras de muestras mesoscópicas con diversas geometrías tales como anillos [3,4], discos [5], cilindros [6], cuadrados [7] y esferas [8], entre otros.

En cálculos teóricos realizados por Meyers [3], se logró predecir la existencia de paramagnetismo en pequeñas regiones del diagrama de fase magnético en anillos superconductores mesoscópicos con un campo magnético axial, para valores del radio interior mayores que un 15% del radio exterior. Además se mostró que el número y extensión de esas regiones paramagnéticas crece con el aumento en el tamaño del hueco. Este fenómeno recibe el nombre de efecto Meissner paramagnético (PME). Meyers atribuye la formación de estas regiones paramagnéticas en el diagrama de fase temperatura-campo, alternadas con regiones diamagnéticas, a la competencia entre las densidades de corriente diamagnética y paramagnética sobre los bordes exterior e interior del anillo, respectivamente.

Recientemente, se ha predicho teóricamente la existencia de efecto Meissner paramagnético intrínseco en muestras volumétricas de materiales superconductores que presentan estructura de capas, tales como superredes superconductoras o cerámicas superconductoras de alta temperatura [9]. La aparición de este efecto, inusual en sistemas macroscópicos, está relacionada estrechamente con el confinamiento bidimensional a que están sometidos los pares de Cooper en la estructura interna de estos materiales, por ejemplo, dentro de las capas de  $\text{CuO}_2$  que se forman en la estructura cristalina de las cerámicas superconductoras de alta temperatura crítica. Esto se evidencia claramente del hecho que la aparición del PME intrínseco se presenta en sistemas superconductores con  $\xi_{\perp} < d$ , donde  $\xi_{\perp}$  es la longitud de coherencia perpendicular a las capas y  $d$  una distancia característica de separación entre capas [9].

La influencia del parámetro de Ginzburg-Landau (razón entre la longitud de penetración magnética y la longitud de coherencia) sobre el diagrama de fase temperatura-campo, en la región crítica de sistemas superconductores mesoscópicos, no ha sido estudiada en forma sistemática hasta el momento.

En este trabajo se analiza el papel del confinamiento geométrico sobre el comportamiento crítico de anillos superconductores mesoscópicos tipo II, de espesor despreciable, con radios interior y exterior  $R_h$  y  $R$ , respectivamente,

considerando diferentes valores del parámetro  $\kappa$  de Ginzburg-Landau.

Se asume que el anillo se encuentra en presencia de un campo magnético constante y axial  $H$ , perpendicular al plano del mismo, con los dos parámetros geométricos  $R_h$  y  $R$ , mencionados previamente.

Específicamente, se estudia la influencia del parámetro de Ginzburg-Landau  $\kappa$  sobre el diagrama de fase en la región crítica de estos sistemas, al igual que la variación de las regiones del diagrama de fase donde existe efecto Meissner paramagnético, con respecto al cambio en el cociente  $R_h/R$  entre los radios interior y exterior del anillo.

## 2. Modelo Teórico

El punto de partida es la expresión para la energía libre GL [1], en la que podemos ignorar el término de energía magnética, debido a que el espesor del anillo es despreciable en comparación con la longitud de penetración  $\lambda(T)$  del campo magnético, quedando entonces:

$$F = \int [a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| (-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{2e}{c} \vec{A}) \Psi \right|^2] dV, \quad (1)$$

donde  $a(T) = a_0(T/T_{c0} - 1)$ ,  $T_{c0}$  es la temperatura crítica a campo cero y  $\vec{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}$ , es el potencial vectorial del campo externo uniforme  $\mathbf{H}$ , ya que el efecto de apantallamiento es débil para muestras de espesor despreciable.

Minimizando la ecuación (1) con respecto a  $\Psi^*$ , obtenemos una ecuación diferencial no lineal para el parámetro de orden, cuya forma adimensional en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \psi - \left( \frac{i}{x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\phi}{\phi_0} x \right)^2 \psi + \frac{R^2}{\lambda^2} \kappa^2 (\psi - \psi^3) = 0, \quad (2)$$

en la cual  $\psi = \Psi / \sqrt{|a|/b}$ .

Además se ha usado la variable adimensional  $x = \rho/R$ , y la cantidad  $\phi = \pi R^2 H$  es el flujo del campo externo a través de un área igual a la limitada por el radio exterior del anillo.

Dado que, en la región crítica, el módulo del parámetro de orden toma valores muy pequeños, podemos despreciar el término no lineal en la ecuación (2), e imponer las condiciones de frontera adecuadas para un anillo superconductor en el vacío [1]:

$$\frac{d}{dx} f(x=1) = 0, \quad \frac{d}{dx} f\left(x = \frac{R_h}{R}\right) = 0, \quad (3)$$

en donde, debido a la simetría azimutal del sistema, se proponen soluciones de momento angular definido  $n$  para el parámetro de orden, en la forma [3]:

$$\psi_n = f_n(x)e^{in\varphi}, \quad (4)$$

que al sustituirse en la ecuación diferencial (2), da como resultado la ecuación de Kummer [3,10] para el módulo del parámetro de orden adimensional  $f_n(x)$ , cuya solución general puede expresarse como la combinación lineal de las funciones hipergeométricas confluentes  $M$  y  $U$  [10] en la forma siguiente:

$$f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2} \frac{\phi}{\phi_0}} \left[ AM \left( Y, n+1, x^2 \frac{\phi}{\phi_0} \right) + BU \left( Y, n+1, x^2 \frac{\phi}{\phi_0} \right) \right], \quad (5)$$

donde  $Y = 1/2 - 1/4(R^2/\lambda^2)\kappa^2(\phi_0/\phi)$  y las dos constantes  $A$  y  $B$  se determinan de las condiciones de frontera. La primera de estas funciones hipergeométricas, la función  $M$ , es regular en el origen, pero diverge en el infinito. De otro lado, la función  $U$  diverge en el origen, pero es convergente en el infinito.

De la primera condición de frontera obtenemos la razón  $A/B$  en términos de  $\phi$ ,  $R^2/\lambda^2$  y  $n$ , mientras que la segunda condición se resuelve numéricamente para obtener  $R^2/\lambda^2$  en función de  $\phi$  para cada  $n$ . Para un flujo  $\phi$  dado, la línea crítica  $T_c(\phi)$  se obtiene escogiendo el valor del momento angular que minimice la cantidad  $R^2/\lambda^2$  [3], la cual es proporcional a la diferencia  $T_{c0} - T$ , debido a la usual dependencia GL de la longitud de penetración magnética con la temperatura,  $\lambda(T) = \lambda_0 / \sqrt{1 - T/T_{c0}}$  [1].

### 3. Resultados y Discusión

En las figuras 1 (a), (b) y (c), se muestran los diagramas de fase Temperatura-Campo para anillos superconductores mesoscópicos cuya razón  $R_i/R$  es fija e igual a 0.5, para cuatro valores diferentes del parámetro de Ginzburg-Landau ( $\kappa = 5$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\kappa = 50$ ,  $\kappa = 100$ ). Cada una de estas curvas define la línea de transición entre un estado de superconductividad superficial y el estado normal en el anillo, dividiendo el diagrama de fase en dos regiones: la superior corresponde al estado superconductor, mientras que la inferior corresponde al estado normal. Para un valor dado de la cantidad  $R^2/\lambda^2$ , que a su vez define un valor de la temperatura  $T$ , el respectivo valor  $\phi/\phi_0$  de la abscisa determina el campo crítico  $H_{c3}(T)$ , por encima del cual se rompe la superconductividad superficial en el anillo.

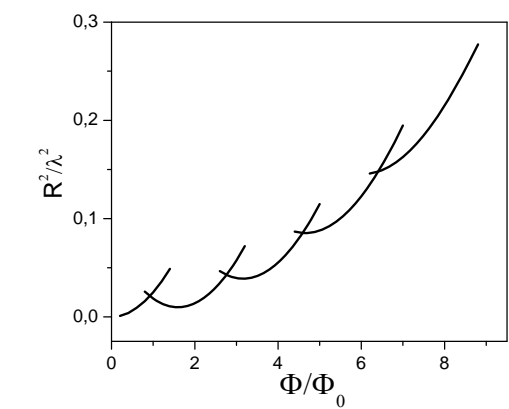
Puede apreciarse claramente, en cada diagrama, la existencia de cúspides, correspondientes a transiciones entre dife-

rentes estados de momento angular ( $n = 0, 1, 2$ , etc.), debidas a la entrada de cuantos de flujo adicionales en la región interior del anillo.

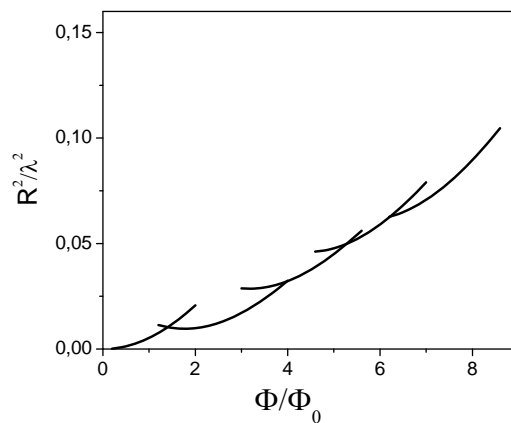
Otro aspecto relevante en los diagramas de fase es la aparición, inmediatamente después de algunas de las transiciones entre estados de momento angular, de regiones paramagnéticas caracterizadas por una disminución en la energía del sistema con el aumento del campo externo aplicado. Este fenómeno se conoce con el nombre de efecto Meissner paramagnético (PME) [3,9]. Adicionalmente, puede observarse que las regiones en las que se presenta el PME se hacen cada vez más estrechas, hasta desaparecer (prácticamente en todos los casos) después del estado de momento angular  $n = 3$ , a partir del cual las curvas exhiben un comportamiento monótono creciente. El incremento en el parámetro  $\kappa$  no afecta de manera apreciable ni la posición, ni la extensión de las regiones del diagrama de fase en las que aparece PME.

También es importante notar que, para una temperatura dada, un aumento en el valor del parámetro de Ginzburg-Landau  $\kappa$  ocasiona un incremento, una variación por un factor de escala, del valor del campo crítico requerido para el rompimiento de la superconductividad superficial en el anillo, lo que hace un tanto difícil una comparación apreciable en una misma gráfica. Como una consecuencia de lo anterior, se nota un ensanchamiento de la región correspondiente a la superconductividad superficial en el diagrama de fase, lo cual implica que en los superconductores fuertes del tipo II, con valores del parámetro  $\kappa \gg 1$ , se favorece el estado de superconductividad superficial en muestras mesoscópicas. Típicos ejemplos de superconductores fuertes del tipo II son las cerámicas superconductoras de alta temperatura crítica, tales como YBaCuO o BiSrCuO, con valores del parámetro  $\kappa$  del orden de 100, o aún mayores.

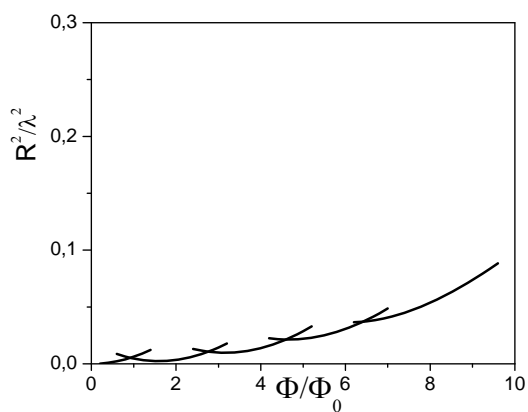
En las figuras 2 (a), (b) y (c) se ilustran los diagramas de fase para anillos superconductores mesoscópicos con un valor fijo de  $\kappa$  ( $\kappa = 10$ ) y tres valores diferentes de la razón  $R_i/R$ . Al igual que en las figuras 1, puede verse la aparición tanto de cúspides como de regiones de efecto Meissner paramagnético, en los diagramas de fase. A diferencia de lo que ocurre con la variación del parámetro  $\kappa$ , los cambios en la razón  $R_i/R$  afectan considerablemente la posición y características de las regiones que exhiben PME. Puede notarse una tendencia a la periodicidad en la aparición y desaparición de estas regiones, con el aumento del cociente  $R_i/R$ . Adicionalmente, se observa que a medida que el radio interior del anillo se aproxima al radio exterior (razón  $R_i/R$  se aproxima a 1), el sistema muestra un comportamiento similar al observado en el experimento de Little-Parks [2], como se evidencia claramente en la figura 2 (c).



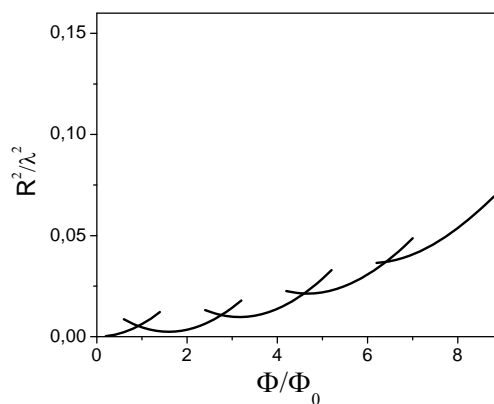
(a)



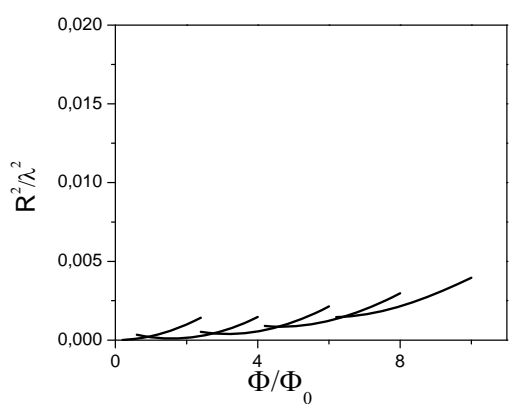
(a)



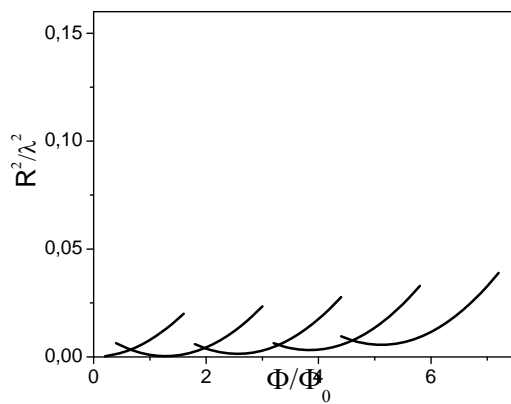
(b)



(b)



(c)

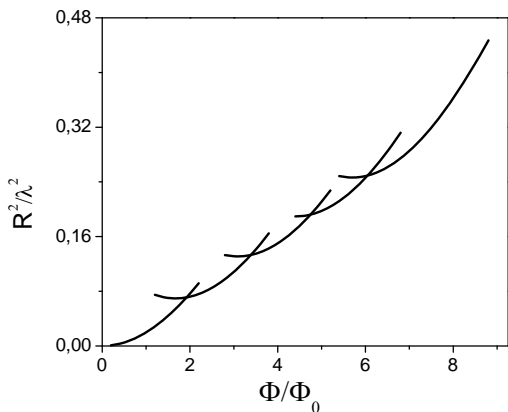


(c)

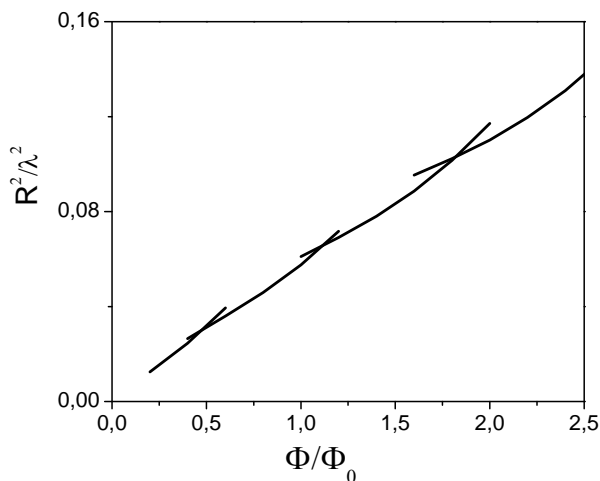
**Fig. 1.** Diagramas de fase para anillos superconductores mesoscópicos con  $R_h/R = 0.5$ , para diferentes valores de  $\kappa$ : (a)  $\kappa=5$ , (b)  $\kappa=10$ , (c)  $\kappa=50$ .

**Fig. 2.** Diagramas de fase para anillos superconductores mesoscópicos con  $\kappa=10$ , para diferentes valores de  $R_h/R$ : (a)  $R_h/R = 0.25$ , (b)  $R_h/R = 0.5$ , (c)  $R_h/R = 0.75$ .

Finalmente, se analizaron los casos límites de un disco plano y un agujero circular en un plano infinito, los cuales se obtienen de la ecuación (5) haciendo  $A=0$  ó  $B=0$ , respectivamente y graficando  $R^2/\lambda^2$  en función de  $\phi/\phi_0$ .



**Fig. 3.** Diagrama de fase para un disco plano, con  $\kappa = 5$ .



**Fig. 4.** Diagrama de fase para un agujero circular en un plano infinito, con  $\kappa = 5$ .

En la figura 3 se observa que para el caso de un disco plano no existen regiones paramagnéticas entre transiciones de diferentes estados de momento angular, por lo cual es sistema solo tiene comportamiento diamagnético. Teniendo presente que el Efecto Meissner Paramagnético en anillos se presenta debido a la competencia entre la corriente diamagnética en el borde externo y la corriente paramagnética

en el interno, puede verse que en un disco esto no ocurre, ya que solo tiene una frontera por donde circula la corriente diamagnética. Nuestros resultados, en el caso límite del disco, concuerdan muy bien con los obtenidos anteriormente por Schweigert y Peeters [11]

En la figura 4 se muestra el diagrama de fase temperatura-campo para el otro caso límite, correspondiente a un agujero circular en un plano infinito. Puede verse que las curvas correspondientes a transiciones entre diferentes estados son monótonas crecientes, por lo cual, no existen regiones paramagnéticas entre dichas transiciones y el sistema solo presenta comportamiento diamagnético. Este último resultado fue obtenido por Bezryadin, Buzdin y Pannetier, quienes estudiaron una película delgada con un agujero circular [12], encontrando la no existencia de regiones paramagnéticas entre transiciones.

#### 4. Conclusiones

El principal aporte del presente trabajo consiste en el estudio sistemático de la influencia del parámetro  $\kappa$  de Ginzburg-Landau sobre el diagrama de fase temperatura-campo en la región crítica de anillos superconductores mesoscópicos construidos con un material superconductor tipo II. En particular, se ha estudiado la manera como afecta dicho parámetro tanto la aparición de regiones paramagnéticas en el diagrama de fase, como la extensión de la región correspondiente a superconductividad superficial en dicho diagrama. Se encontró que la variación del valor del parámetro  $\kappa$  no afecta apreciablemente la posición y el ancho de las regiones donde aparece efecto Meissner paramagnético, aunque si favorece considerablemente el ensanchamiento de la región donde existe superconductividad superficial en el diagrama de fase.

Adicionalmente, para un valor fijo del parámetro  $\kappa$ , se analizó la influencia de la geometría del anillo, a través del cociente entre sus radios interior y exterior, sobre las características de las regiones paramagnéticas en el diagrama de fase temperatura-campo. Se observó una fuerte influencia de la razón  $R_i/R$  sobre la posición y extensión de las regiones que presentan paramagnetismo en el diagrama de fase, notándose una clara tendencia a un comportamiento similar al observado en el experimento de Little-Parks, a medida que el valor de dicho cociente se acerca a la unidad.

También se analizaron los casos límite del disco superconductor plano ( $R_i = 0$ ) y de un agujero practicado en un plano superconductor ( $R \rightarrow \infty$ ). En ambos casos se evidenció la no existencia de regiones paramagnéticas en el diagrama de fase, en buena concordancia con resultados obtenidos previamente por otros autores [11,12].

## Agradecimientos

Este trabajo fue financiado parcialmente por Colciencias a través de los proyectos de investigación identificados con los códigos 1106-452-21296 y 1106-14-17903, el Centro de Excelencia en Nuevos Materiales (CENM) bajo el contrato 043-2005 suscrito con Conciencias, el convenio de colaboración CNPq-Colciencias No. 0491486/2004-9 y la Universidad del Valle.

## Referencias

- [1] P. G. de Gennes, *Superconductivity of metals and alloys*, W. H. Benjamin, New York (1966).
- [2] W.A. Little and R.D. Parks, Phys. Rev. Lett. **9**, 9 (1962); Phys. Rev. **133**, 97A (1964).
- [3] C. Meyers, Phys. Rev. B **68**, 104522 (2003).
- [4] B. H. Zhu, S. P. Zhou, Y. M. Shi, G. Q. Zha, and K. Yang, Phys. Rev. B **74**, 014501 (2006).
- [5] B. J. Baelus, A. Kanda,, F. M. Peeters, Y. Ootuka, and K. Kadowaki, Phys. Rev. B **71**, 140502 (2005).
- [6] W. V. Pogosov, Phys. Rev. B **65**, 224511 (2002).
- [7] V. R. Misko, H. J. Zhao, F. M. Peeters, V. Oboznov, S. V. Dubonos and I. V. Grigorieva, Supercond. Sci. Technol. **22**, 034001 (2009).
- [8] Ben Xu, M. V. Milošević and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **77**, 144509 (2008).
- [9] A. G. Lebed, Phys. Rev. B **78**, 012506 (2008).
- [10] M. Abramowicz and I. R. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Inc., New York (1972).
- [11] V. A. Schweigert and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **57**, 13 817 (1998).
- [12] A. Bezryadin, A. Buzdin and B. Pannetier. Phys. Rev. B **51**, 3718 (1995).

(\*)Autor Correspondiente: landress18@gmail.com